

Un secolo di Fisica Moderna

Corso di formazione per docenti di fisica della scuola secondaria superiore

**Relatività del tempo e dello spazio e
dinamica relativistica**

Esperto
Edoardo Piparo

Relatività del tempo e dello spazio e dinamica relativistica

I postulati di Einstein della relatività ristretta (1905)

Una serie di evidenze sperimentali, tra cui, in particolare, il risultato nullo dell'esperimento di Michelson e Morley, indussero Einstein a formulare i seguenti postulati:

Le leggi dei fenomeni elettromagnetici, incluso il fatto che la velocità di propagazione della luce nel vuoto è uguale al valore costante c , come pure le leggi della meccanica, sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali, anche se questi riferimenti sono in moto traslatorio uniforme l'uno rispetto all'altro. Conseguentemente, tutti i sistemi di riferimento inerziali sono completamente equivalenti.

La velocità della luce nel vuoto è indipendente dal moto della propria sorgente.



Relatività del tempo e dello spazio e dinamica relativistica

L'intervallo spazio-temporale

I postulati della relatività ristretta comportano l'invarianza dell'**intervallo spazio-temporale** Δs definito da:

$$\Delta s^2 := c^2 \Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$$

per sistemi di riferimento inerziali, in moto l'uno rispetto all'altro di moto traslatorio rettilineo uniforme.



Relatività del tempo e dello spazio e dinamica relativistica

L'intervallo spazio-temporale

L'invarianza dell'**intervallo spazio-temporale** implica:

- *La dilatazione dei tempi*
- *La contrazione delle lunghezze*

Relatività del tempo e dello spazio e dinamica relativistica

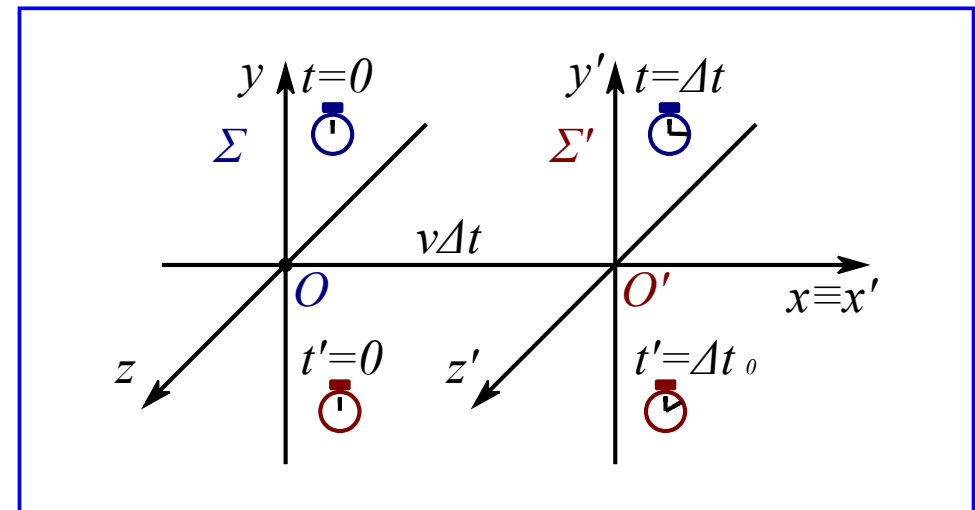
La dilatazione dei tempi

Con riferimento alla figura:

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - v^2 \Delta t^2$$

$$\Delta s'^2 = c^2 \Delta t_0^2$$

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2 \Rightarrow \Delta t = \gamma \Delta t_0$$



Fattore di dilatazione: $\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ con: $\beta := v/c$

Δt_0 : *intervallo di tempo proprio*

Relatività del tempo e dello spazio e dinamica relativistica

Contrazione delle lunghezze

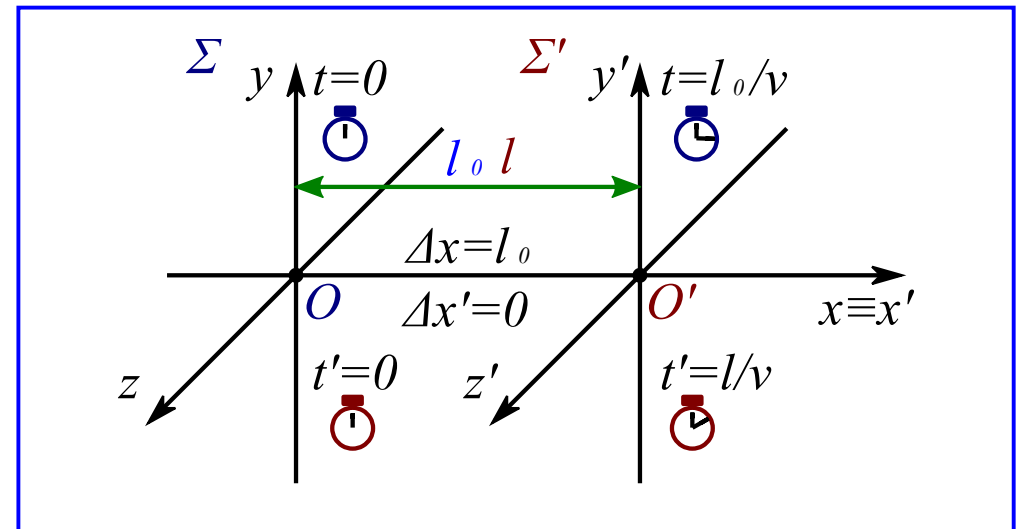
Con riferimento alla figura:

$$\Delta s^2 = c^2 \ell_0^2 / v^2 - \ell_0^2$$

$$\Delta s'^2 = c^2 \ell^2 / v^2$$

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2 \Rightarrow \ell = \ell_0 / \gamma$$

ℓ_0 : *lunghezza propria*



Relatività del tempo e dello spazio e dinamica relativistica

Le trasformazioni di Lorentz

Le trasformazioni che consentono di esprimere le coordinate spazio-temporali dell'evento nel sistema di O in funzione di quelle di O' e viceversa devono soddisfare due requisiti fondamentali:

- Le equazioni devono essere **lineari**, in modo da garantire l'omogeneità dello spazio e del tempo nei due sistemi di riferimento;
- L'**intervallo spazio-temporale** deve rimanere **invariante**.



Relatività del tempo e dello spazio e dinamica relativistica

Le trasformazioni di Lorentz

Si dimostra che le *trasformazioni di Lorentz* sono date dalle equazioni:

$$\begin{cases} x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma(t' + vx'/c^2) \end{cases}$$

Le trasformazioni inverse si ottengono scambiando le grandezze con apice con quelle senza apice e invertendo il segno della velocità v .

Relatività del tempo e dello spazio e dinamica relativistica

La composizione delle velocità

Le trasformazioni di Lorentz consentono di determinare la velocità $\mathbf{u}'$ della particella rispetto al sistema di riferimento O' , in moto con velocità $\mathbf{u}$ rispetto a O con velocità $\mathbf{v}$:

$$\begin{cases} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2} \\ u_y &= \frac{u'_y}{\gamma(1 + vu'_x/c^2)} \\ u_z &= \frac{u'_z}{\gamma(1 + vu'_x/c^2)} \end{cases}$$

Si noti che se v/c e vu'_x/c^2 tendono a zero, le formule si riducono alle usuali formule di addizione delle velocità di Galileo. Un'altra proprietà interessante è che il modulo della velocità nel riferimento O' non è mai maggiore di c .

Relatività del tempo e dello spazio e dinamica relativistica

La quantità di moto relativistica

Il primo postulato della relatività implica la necessità di modificare le leggi della meccanica. Tali modifiche, però, non possono inficiare la validità dei principi di conservazione, che dipendono da proprietà fondamentali di invarianza delle leggi fisiche nello spazio (**quantità di moto** e **momento angolare**) e nel tempo (**energia**). Le nuove leggi, inoltre, devono ridursi a quelle della meccanica newtoniana nel limite di velocità piccole rispetto a c .



Relatività del tempo e dello spazio e dinamica relativistica

La quantità di moto relativistica

La quantità di moto relativistica p di un punto materiale è una grandezza vettoriale dipendente unicamente dalla velocità vettoriale $\mathbf{v}$ della particella, e sarà quindi della forma:

$$\mathbf{p} = m(v) \mathbf{v}$$

dove $m(v)$ è una funzione del modulo della velocità v .

Per $v \ll c$ la (3) deve ridursi alla quantità di moto classica, il che significa che facendo tendere v a zero $m(v)$ deve tendere alla massa classica m_0 della particella:

$$m(0) = m_0$$

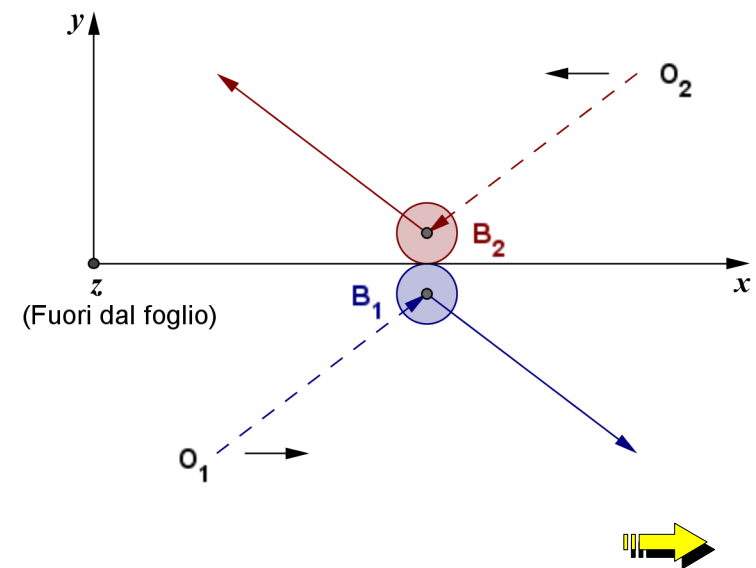


Relatività del tempo e dello spazio e dinamica relativistica

La quantità di moto relativistica

Per determinare $m(v)$ si può seguire il metodo di **Lewis e Tolman** (1908). Come si vede in figura, O_1 e O_2 si muovono rispetto al riferimento xyz (Σ) parallelamente all'asse x con velocità uguali e opposte. O_1 e O_2 lanciano due sfere identiche, B_1 e B_2 , di ugual massa m_0 , con velocità che, nei rispettivi sistemi di riferimento, è diretta parallelamente all'asse y e ha modulo u .

Nel sistema di riferimento xyz , B_1 e B_2 si muovono con uguali velocità secondo traiettorie parallele. Supponendo che l'urto sia perfettamente elastico e che si conservi la quantità di moto, l'unico effetto dell'urto sarà quello di invertire i segni delle componenti y delle velocità delle due sfere.



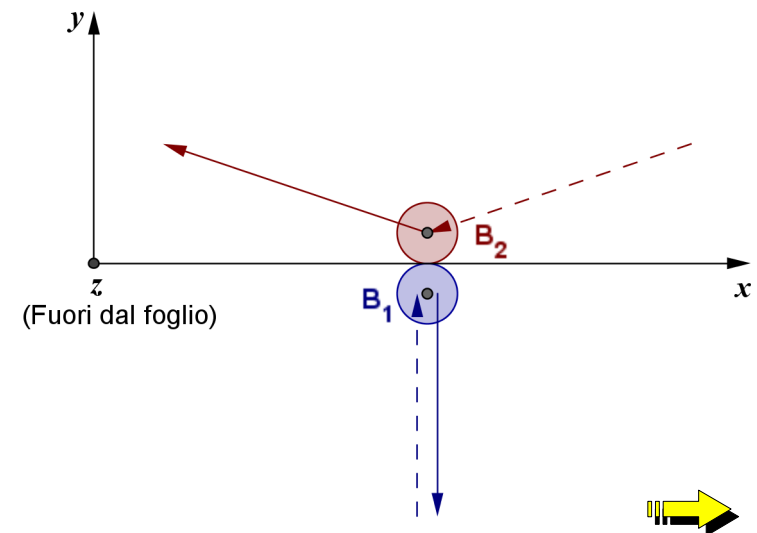
Relatività del tempo e dello spazio e dinamica relativistica

La quantità di moto relativistica

La figura mostra come è visto l'urto nel riferimento di O_1 . In questo riferimento B_1 si muove parallelamente all'asse y con velocità di modulo u e dopo l'urto si muove con la medesima velocità ma in verso opposto. La sfera B_2 mantiene costante la propria componente x della velocità, che è uguale alla velocità v di O_2 rispetto ad O_1 , mentre la componente y si mantiene costante in modulo ma cambia verso.

Per determinare tale modulo, w , si osservi che la componente y della velocità di B_2 rispetto a O_2 è uguale a u . Utilizzando le formule di composizione delle velocità, si ha:

$$w = u/\gamma$$



Relatività del tempo e dello spazio e dinamica relativistica

La quantità di moto relativistica

Imponendo la conservazione della componente y della quantità di moto nel riferimento di O_1 pertanto si ottiene:

$$m(u)u = m(\sqrt{v^2 + u^2/\gamma^2})u/\gamma$$

da cui:

$$m(\sqrt{v^2 + u^2/\gamma^2}) = \gamma m(u)$$

Nel limite $u \rightarrow 0$ infine si ottiene:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

La funzione $m(v)$ è anche detta *massa relativistica*, ma tale terminologia è impropria non trattandosi di un *invariante relativistico*. La massa vera e propria non dipende dalla velocità, è una caratteristica del corpo, come la carica e lo spin, ed è pertanto la “vecchia” m_0 di Galileo e Newton!

Relatività del tempo e dello spazio e dinamica relativistica

Energia relativistica

Anche in ambito relativistico, la forza si definisce come la variazione della quantità di moto nell'unità di tempo:

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta(m(v)\mathbf{v})}{\Delta t}$$

Moltiplicando ambo i membri scalarmente per lo spostamento infinitesimo $\Delta\mathbf{r}$, pertanto, si ottiene, a meno di infinitesimi di ordine superiore, la variazione ΔK di energia cinetica:

$$\Delta K = \Delta(m(v)\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = (\Delta m(v))v^2 + (m(v)\Delta v)v$$



Relatività del tempo e dello spazio e dinamica relativistica

Energia relativistica

Dalla relazione tra la funzione di massa relativistica e la velocità si ottiene:

$$m(v)^2(c^2 - v^2) = m_0^2 c^2$$

Dato che l'azione della forza non modifica la massa a riposo della particella, se questa è priva di struttura interna, calcolando la variazione di tale relazione, a meno di infinitesimi di ordine superiore, si ha:

$$m(v)v\Delta v = \Delta(m(v))(c^2 - v^2)$$

che sostituito nella precedente espressione di ΔK dà il risultato:

$$\Delta K = \Delta(m(v))c^2$$



Relatività del tempo e dello spazio e dinamica relativistica

Energia relativistica

Supponendo che la particella sia inizialmente in quiete, si ha:

$$K = m(v)c^2 - m_0c^2$$

In base a tale relazione l'energia cinetica corrisponde alla differenza di due termini: l'**energia relativistica totale** (mc^2) e l'**energia a riposo** (m_0c^2).

Ciò conduce ad affermare che **la massa è equivalente a una forma d'energia**.

Ogni forma d'energia E può pertanto trasformarsi in massa e viceversa. Tale relazione d'equivalenza è sintetizzata, seppur in maniera non del tutto corretta, nella notissima relazione:

$$E = mc^2$$

Il significato reale di questa equazione deve però essere adeguatamente approfondito...

Relatività del tempo e dello spazio e dinamica relativistica

La relazione energia-quantità di moto

Dalla relazione tra la funzione di massa relativistica e la velocità si ottiene::

$$(mc^2)^2 = (mvc)^2 + (m_0c^2)^2$$

Da tale relazione, ponendo $E = m c^2$, l'**energia relativistica totale**, si deduce:

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$$

Da tale **relazione energia-quantità di moto**, si deduce che:

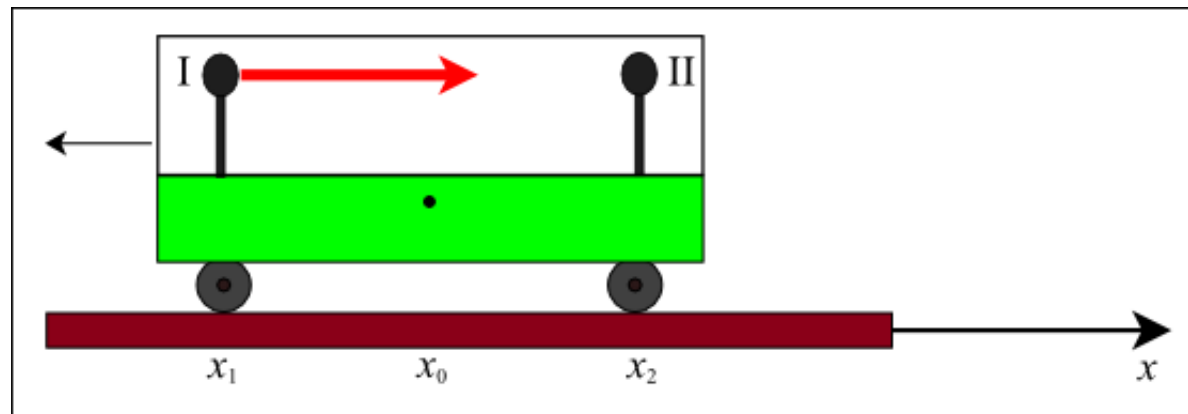
- Se il corpo è in quiete ($p = 0$), la massa del corpo è equivalente a una forma d'energia: $E_0 = m_0c^2$
- Una particella priva di massa ($m_0 = 0$) possiede una quantità di moto data da:
 $p = E / c$

Relatività del tempo e dello spazio e dinamica relativistica

Il teorema dell'inerzia dell'energia

Il *teorema dell'inerzia dell'energia* (Einstein, 1905), afferma che ogni forma d'energia interna al sistema sia equivalente a una massa secondo l'equazione $E = m c^2$.

Si immagini di disporre di un carrello che possa muoversi senza attriti lungo un'assegnata direzione, asse x . Ai lati del carrello sono posti due dispositivi (I e II), esattamente simili, capaci di inviare un segnale luminoso istantaneo nella direzione dell'asse x e di assorbire completamente un segnale incidente.

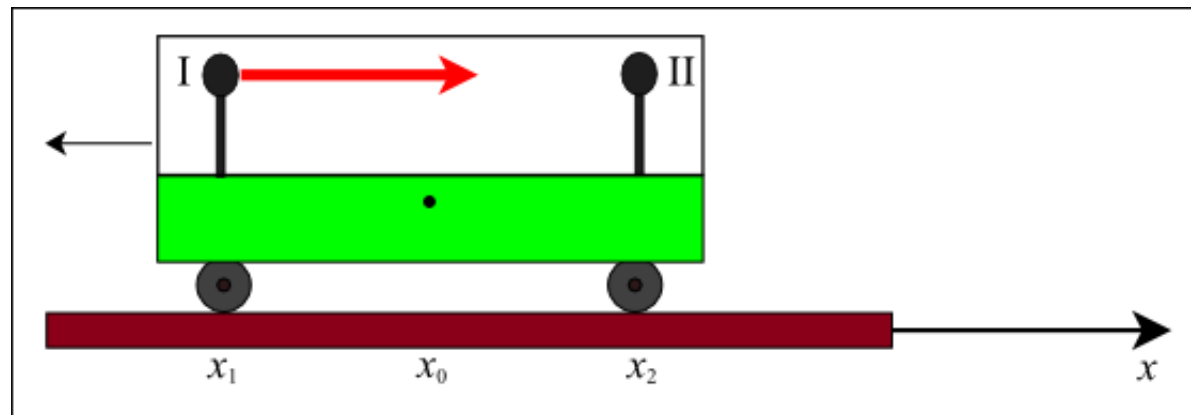


Relatività del tempo e dello spazio e dinamica relativistica

Il teorema dell'inerzia dell'energia

Si supponga che il primo dispositivo invii un segnale luminoso diretto verso il secondo. Per effetto della *pressione di radiazione*, il carrello subisce un rinculo, che lo fa muovere verso sinistra fino a quando non è arrestato dalla pressione di radiazione esercitata dal segnale quando è assorbito dal secondo dispositivo.

Procedendo in questo modo sembrerebbe, pertanto, possibile spostare il centro di massa del carrello di un tratto arbitrario senza l'intervento di forze esterne!



Relatività del tempo e dello spazio e dinamica relativistica

Il teorema dell'inerzia dell'energia

Per il *teorema del moto del centro di massa*, però, il centro di massa deve rimanere in quiete.

Sia E l'energia dell'impulso luminoso. Poiché la luce non ha massa, tale impulso ha una quantità di moto pari a $p = E / c$. Se M è la massa del carrello, a seguito dell'emissione questi acquisirà una quantità di moto, diretta verso sinistra, data da $M v = E / c$, che lo fa rinculare di un tratto $\Delta x = v \Delta t$, dove:

$$\Delta t = \frac{x_2 - x_1}{c}$$

è il tempo impiegato dalla luce a percorrere il tratto che separa i due dispositivi.

Poiché il centro di massa rimane in quiete, l'unica cosa possibile è che il trasferimento di energia da un dispositivo all'altro sia accompagnato da un analogo trasferimento di massa.



Relatività del tempo e dello spazio e dinamica relativistica

Il teorema dell'inerzia dell'energia

Se m è la massa trasferita, deve allora risultare:

$$M(x_0 - \Delta x) - m(x_1 - \Delta x) + m(x_2 - \Delta x) = Mx_0$$

da cui si deduce:

$$m = \frac{M\Delta x}{x_2 - x_1} = \frac{E}{c^2}$$

Scrive Einstein in un brano dal titolo “*L’inerzia di un corpo dipende dal suo contenuto di energia*”:

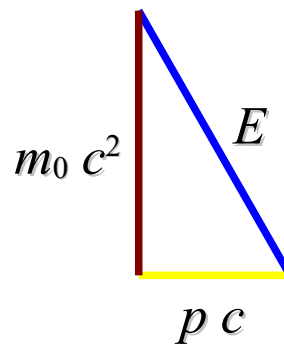
Se un corpo emette una quantità di energia E sotto forma di radiazioni la sua massa diminuisce di E / c^2 . Poiché non esiste alcuna differenza fra la massa sottratta al corpo e l’energia di radiazione, siamo condotti a concludere che la massa di un corpo è una misura del suo contenuto in energia.

Relatività del tempo e dello spazio e dinamica relativistica

$E = m c^2$?

In base a quanto esposto si può affermare che:

- Se c è massa c è sempre una quantità equivalente di energia
- Se c è energia non sempre c è una quantità equivalente di massa
- L'origine della massa è un problema centrale della fisica fondamentale odierna



Relatività del tempo e dello spazio e dinamica relativistica

Le trasformazioni di quantità di moto ed energia

Nei problemi d'urto relativistico è spesso necessario trasformare la quantità di moto e l'energia da un sistema di riferimento all'altro.

Nelle solite ipotesi e facendo uso delle *formule di composizione delle velocità*, si dimostra, con lunghi calcoli, che le trasformazioni cercate sono date da:

$$\begin{cases} p_x &= \gamma(p'_x + vE'/c^2) \\ p_y &= p_{y'} \\ p_z &= p_{z'} \\ E &= \gamma(E' + vp'_x) \end{cases}$$

Le trasformazioni inverse si ottengono scambiando le grandezze con apice con quelle senza apice ed invertendo il segno della velocità v .

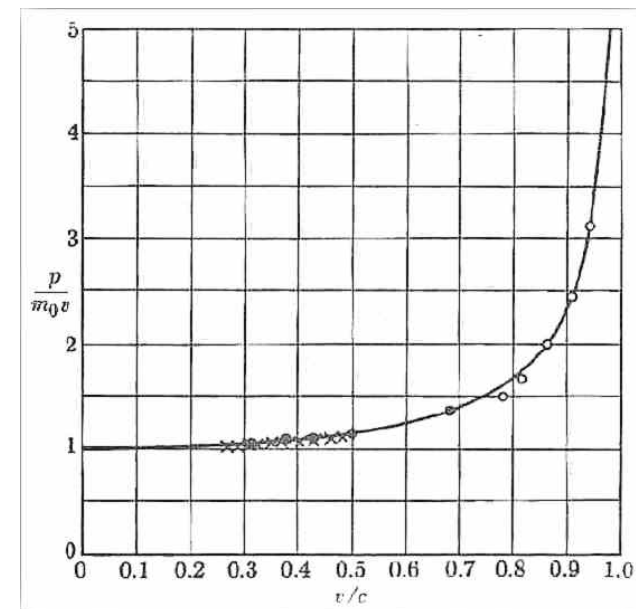
La forte somiglianza tra queste relazioni e le *trasformazioni di Lorentz* trova piena giustificazione nell'ambito del ***formalismo dei quadrivettori***.

Relatività del tempo e dello spazio e dinamica relativistica

Evidenze sperimentali

I risultati fondamentali della dinamica relativistica sono stati confermati da numerosi esperimenti:

- Esperienze sui *raggi catodici* (Kaufmann, 1906; Bucherer, 1909)
- Spostamento delle righe spettrali, specialmente di quelle dell'idrogeno
- Decadimenti radioattivi, disintegrazioni artificiali, fissione nucleare, etc.
- Produzione di coppie elettrone-positrone



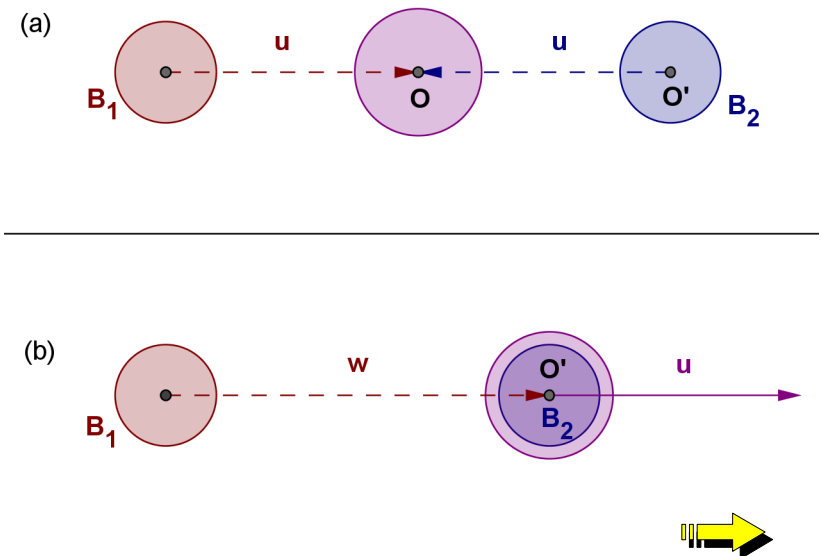
Relatività del tempo e dello spazio e dinamica relativistica

Un esempio: urto totalmente anelastico

Si consideri l'urto centrale totalmente anelastico di due sfere identiche, B_1 e B_2 , di ugual massa m_0 , che inizialmente si muovono, rispetto a O , riquadro (a), l'una verso l'altra con velocità di modulo u . Dopo l'urto le due sfere formano un blocco unico, in quiete rispetto a O . In tal modo è soddisfatta la conservazione della quantità di moto.

Nel riferimento di O' , riquadro (b), dove B_2 è in quiete prima dell'urto, B_1 si muove verso B_2 con velocità di modulo w . Per la prima delle *formule di composizione delle velocità* si ha:

$$w = \frac{2u}{1 + u^2/c^2}$$



Relatività del tempo e dello spazio e dinamica relativistica

Un esempio: urto totalmente anelastico

La quantità di moto totale relativistica prima dell'urto pertanto è data da:

$$p_i = \frac{m_0 w}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} = \frac{2m_0 u}{1 - u^2/c^2}$$

Dopo l'urto le due sfere costituiscono un unico corpo che si muove con velocità di modulo u verso destra (conseguenza delle *formule di composizione delle velocità*).

La quantità di moto totale finale dovrebbe pertanto essere data da:

$$p_f = \frac{(2m_0)u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Ma p_i è diverso da p_f !

Nel riferimento di O' la quantità di moto non si conserva...



Relatività del tempo e dello spazio e dinamica relativistica

Un esempio: urto totalmente anelastico

... e invece si conserva!

Nel riferimento di O l'energia cinetica delle sfere prima dell'urto si trasforma in *energia interna*. Dato che il corpo risultante dall'aggregazione delle due sfere dopo l'urto rimane in quiete, tutta l'energia iniziale si trasforma in massa!

La nuova massa M_0 del corpo pertanto, in virtù del *teorema dell'inerzia dell'energia*, è data da:

$$M_0 = \frac{E_0}{c^2} = 2 \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

La vera quantità di moto finale, nel riferimento di O' , è quindi data da:

$$p_f = \frac{(M_0)u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{2m_0u}{1 - u^2/c^2} = p_i$$

Relatività del tempo e dello spazio e dinamica relativistica

Riferimenti bibliografici

- U. Amaldi, *L'Amaldi per i licei scientifici.blu*, vol. 3, Zanichelli, 2016
- M. Born, *Fisica atomica*, Boringhieri, 1976
- A. Caforio, A. Ferilli, *Nuova Physica 2000*, vol. 3, Le Monnier, 2000
- R.M. Eisberg, *Fundamentals of Modern Physics*, John Wiley & Sons, 1961
- E.F. Taylor, J.A. Wheeler, *Fisica dello spazio-tempo*, Zanichelli, 1996